



گام آفتاب

ترکیب هندسه ۳ (مهر ۱۴۰۲) -  
ریاضیات گسسته (مهر ۱۴۰۲)

سال دوازدهم  
ریاضی



# بہنام خالق دانا سایی





۱) اگر  $A$  ماتریس  $3 \times 3$  باشد و  $|A| = 4$ ، آنگاه دترمینان ماتریس  $|A| \cdot A$ ، کدام است؟

- ۱) ۶۴      ۲) ۹۶      ۳) ۱۲۸      ۴) ۲۵۶

۲) اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$  و  $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، حاصل جمع درایه‌های ماتریس  $(2A - B) \times B$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) -۲      ۳) ۴      ۴) -۴

۳) به ازای کدام مقدار  $x$  و  $y$ ، ماتریس  $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ، یک ماتریس قطری است؟

- ۱)  $x = 1, y = -7$       ۲)  $x = 2, y = -7$       ۳)  $x = 2, y = -5$       ۴)  $x = 1, y = -5$

۴) اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$  و  $3A - 2X = 4I$ ، آنگاه ماتریس  $X$  کدام است؟

- ۱)  $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$       ۲)  $\begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 12 & 14 \end{bmatrix}$       ۳)  $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -6 & 7 \end{bmatrix}$       ۴)  $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -12 & 14 \end{bmatrix}$

۵) اگر  $3A + 2B = I$  و  $A - B = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$ ، آنگاه حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی ماتریس  $A$  کدام است؟

- ۱) ۲      ۲) ۳      ۳) ۶      ۴) ۸

۶) اگر  $A = [a_{ij}]_{p \times p}$  و  $|A| = \frac{1}{p}$  باشد، دترمینان وارون ماتریس  $2A^3$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{p}$       ۲) ۲      ۳)  $\frac{1}{4}$       ۴) ۴

۷) اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  و  $A \cdot (X + I) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ ، مجموع درایه‌های ماتریس  $X$  کدام است؟

- ۱) -۹      ۲) ۷      ۳) ۵      ۴) -۳

۸) اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$ ، ماتریس  $A^7 - A^6$  کدام است؟

- ۱)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$       ۲)  $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$       ۳)  $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$       ۴)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$

۹) با فرض  $A = [a_{ij}]_{p \times p}$ ، دو ماتریس  $2A - I$  و  $4A^2 + 2A + I$ ، وارون یکدیگر هستند، حاصل دترمینان وارون  $A^3$  کدام است؟

- ۱)  $\frac{1}{16}$       ۲) ۱۶      ۳)  $\frac{1}{8}$       ۴) ۸

۱۰) در دستگاه معادلات  $\begin{cases} ax + by = 2 \\ cx + dy = -1 \end{cases}$  معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به صورت  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$  است.  $x + y$  کدام است؟

- ۱) -۴      ۲) -۲      ۳) ۲      ۴) ۴

۱۱) اگر  $n^3 + 2n^2 - 3n$  باشد چند مقدار طبیعی برای  $n$  وجود دارد؟

- ۱) صفر      ۲) یک      ۳) دو      ۴) سه

۱۲) در اثبات یک حکم به روش برهان خلف:

- ۱) ثابت می‌کنیم حکم نادرست است.  
۲) ثابت می‌کنیم فرض نادرست است.  
۳) ثابت می‌کنیم خلاف فرض نادرست است.  
۴) ثابت می‌کنیم خلاف حکم نادرست است.

۱۳) فرض کنید  $a$  عددی صحیح می‌باشد. کدام گزینه نادرست است؟

- ۱)  $|a, 0| = |a|$       ۲)  $|a, 1| = |a|$       ۳)  $|a, 2a| = 2|a|$       ۴)  $|a, a| = |a|$

۱۴) کدام گزینه، مثال نقض دارد؟

۱) هر مربع، یک لوزی است.

۳) هر مثلث متساوی الاضلاع، متساوی الساقین است.

۲) هر عدد اول بزرگتر از ۲، فرد است.

۴) توان دوم هر عدد طبیعی، بزرگتر از توان سوم آن است.

۱۵) کدام یک از گزاره‌های زیر در حالت کلی درست نیست؟

۱)  $a|b \Rightarrow a^4|b^4$

۲)  $a^5|b^5 \Rightarrow a^2|b^2$

۳)  $a|b \Rightarrow a|5a + 7b$

۴)  $a|5a + 7b \Rightarrow a|b$

۱۶) کدام یک از اعداد زیر، برای گزاره «اگر مجموع ارقام عددی به ۱۱ بخش پذیر باشد، آنگاه خود آن عدد نیز بر ۱۱ بخش پذیر است» مثال نقض است؟

۱) ۵۷۶۱

۲) ۵۶۶۵

۳) ۵۶

۴) ۹۹

۱۷) اگر سه عدد طبیعی  $a$ ،  $b$  و  $c$  چنان باشند که  $a|b - c$  و  $b|a$  آنگاه کدام گزینه همواره درست است؟

۱)  $b|c$

۲)  $a|c$

۳)  $c|a$

۴)  $c|b$

۱۸) به ازای بعضی مقادیر طبیعی برای  $n$  دو عدد  $5n + 8$  و  $3n - 1$  نسبت به هم اول نیستند، در آن صورت مجموع ارقام ب.م.م آن دو عدد کدام است؟

۱) ۱۱

۲) ۱۲

۳) ۱۴

۴) ۱۵

۱۹) فرض کنید  $a$  عددی گویا و  $b$  عددی گنگ و  $ab$  عددی گویا باشد. حاصل  $ab^2 + a^3 + 3$  کدام است؟

۱) ۰

۲) ۳

۳) به طور یکتا به دست نمی آید.

۴) چنین چیزی امکان ندارد.

۲۰) کدام عدد، کلیت حکم «هر عدد طبیعی را می توان به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی (بیش از یک عدد) متوالی نوشت» را نقض می کند؟

۱) ۴۰

۲) ۴۶

۳) ۵۶

۴) ۶۴

# پاسخنامه تشریحی

نکته: اگر  $A$  ماتریس مربعی  $n \times n$  و  $k$  عدد حقیقی باشد، آنگاه  $|kA| = k^n |A|$ .  
 ۱ ۲ ۳ ۴ ۱  
 طبق فرض داریم:

$$|A| = |4A| = 4^3 |A| = 4^3 \times 4 = 4^4 = 256$$

ابتدا ماتریس  $2A - B$  را تشکیل می‌دهیم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۲

$$2A - B = 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$(2A - B) \times B = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌ها} = -4 + 2 + 2 + 4 = 4$$

حاصل ضرب دو ماتریس را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۳

$$\begin{bmatrix} x & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}_{2 \times 3} \times \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 0 \\ y & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 2} = \begin{bmatrix} 2x - 1 + 4y & -2x + 4 \\ 4 + 3 + y & -4 + 1 \end{bmatrix}$$

درایه‌های خارج قطر اصلی باید صفر باشند یعنی:

$$\begin{cases} -2x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \\ 7 + y = 0 \Rightarrow y = -7 \end{cases}$$

با توجه به فرض داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۴

$$3A - 2X = 4I$$

$$3 \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} - 2X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} - 2X = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$2X = \begin{bmatrix} 2 & -6 \\ 12 & 14 \end{bmatrix} \rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{bmatrix}$$

طبق فرض داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

$$\begin{cases} 3A + 2B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ 2A - 2B = \begin{bmatrix} 4 & 10 \\ 20 & 14 \end{bmatrix} \end{cases} \xrightarrow[\text{جمع می‌کنیم}]{\text{طرفین را}} \Delta A = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 20 & 15 \end{bmatrix}$$

$$\times \frac{1}{5} \rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow \text{حاصل ضرب درایه‌های قطر اصلی} = 1 \times 3 = 3$$

با توجه به فرض داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$|(2A^3)^{-1}| = |2A^3|^{-1} = \frac{1}{|2A^3|} = \frac{1}{4|A|^3} = \frac{1}{4 \left(\frac{1}{8}\right)} = 2$$

اگر  $X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$  فرض شود: ۱ ۲ ۳ ۴ ۷

$$X + I = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot (X + I) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a+1 & b \\ c & d+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+1 & b \\ -a-1-c & -b-d-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$a + 1 = 2 \rightarrow a = 1$$

$$-b - d - 1 = 3 \xrightarrow{b=-1} 1 - d - 1 = 3 \rightarrow d = -3$$

$$-a - 1 - c = 4 \xrightarrow{a=1} -1 - 1 - c = 4 \rightarrow c = -6 \rightarrow X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\text{مجموع درایه‌های ماتریس } X = 1 - 1 - 6 - 3 = -9$$

ابتدا ماتریس  $A^2$  را یافته و از روی آن ماتریس‌های  $A^6$  و  $A^7$  را به دست می‌آوریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

$$\begin{cases} A^3 = (A^2)^2 \cdot A = (I)^2 \cdot A = I \cdot A = A \\ A^6 = (A^2)^3 = (I)^3 = I \end{cases}$$

$$A^3 - A^6 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

۹) طبق فرض برای دو ماتریس داده شده داریم:

$$(2A - I)(4A^2 + 2A + I) = I$$

$$\rightarrow 8A^3 - I^2 = I \rightarrow 8A^3 - I = I \rightarrow 8A^3 = 2I \rightarrow 4A^3 = I$$

$$\rightarrow |4A^3| = |I| \rightarrow 16|A^3| = 1 \rightarrow |A|^3 = \frac{1}{16} \rightarrow |A^{-1}|^3 = 16$$

۱۰) مطابق فرض سؤال داریم:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \rightarrow x + y = 4$$

۱۱) با توجه به رابطه سؤال، تنها به ازای  $n^3 + 2n^2 - 3n = 0$  رابطه برقرار است، بنابراین داریم:

$$n(n^2 + 2n - 3) = 0 \Rightarrow n(n-1)(n+3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = 0 \\ n = 1 \\ n = -3 \end{cases}$$

پس ۱ مقدار طبیعی برای  $n$  وجود دارد.

۱۲) در روش برهان خلف فرض می‌کنیم حکم برقرار نباشد و به یک نتیجه غیرممکن یا متضاد با فرض می‌رسیم.

۱۳)  $[a, 0]$  تعریف نشده است. بعلاوه می‌دانیم اگر  $a|b$  آنگاه  $|a, b| = |a, b|$  با توجه به این نکته گزینه (۲) و (۳) و (۴) واضح است که درست هستند.

۱۴) اگر  $n = 1$  انتخاب شود، آنگاه  $n^2 = n^2 = 1$  است و درست گزینه (۴) رد می‌شود.

۱۵) برای گزینه ۴ مثال نقض  $a = 7$  و  $b = 2$  وجود دارد.

۱۶) مجموع ارقام ۵۶ بر ۱۱ بخش پذیر است ولی ۵۶ بر ۱۱ بخش پذیر نیست.

$$\left. \begin{matrix} b|a \\ a|b-c \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} b|b-c \\ b|b \end{matrix} \right\} \times (-1) \Rightarrow b|c$$

۱۸) ۱ ۲ ۳ ۴

$$(5n + 8, 3n - 1) = d \Rightarrow \left. \begin{matrix} d|5n + 8 \\ d|3n - 1 \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \times (3) \\ \times (-5) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow d|29 \Rightarrow d = 29 \rightarrow \text{مجموع ارقام} = 11$$

۱۹) اگر  $a$  گویا،  $b$  گنگ و  $ab$  گویا باشد، آن‌گاه  $a$  حتماً صفر است، پس:

$$ab^2 + a^3 + 3 = 0 + 0 + 3 = 3$$

۲۰) فقط اعداد به فرم  $2^k$  را نمی‌توان به صورت مجموع تعدادی عدد طبیعی متوالی نوشت، ولی بقیه اعداد را به اشکال زیر می‌توان نوشت:

$$40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10$$

$$46 = 10 + 11 + 12 + 13$$

$$56 = 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11$$



# پاسخنامه کلیدی



۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴
۵	۱	۲	۳	۴

۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴
۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴

۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴
۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴

۱۶	۱	۲	۳	۴
۱۷	۱	۲	۳	۴
۱۸	۱	۲	۳	۴
۱۹	۱	۲	۳	۴
۲۰	۱	۲	۳	۴



گام آفتاب