گام آفتاب

مجتمع آموزشی گام آفتاب

غیردولتی/هوشمند/دوزبانه

گام آفتاب

ترکیب آزمون هندسه ۳ (تابستان ۱۴۰۲) - ریاضیات گسسته

سال دوازدهم

ریاضی

۶۹۶۴۷۷۱


به نام خالق دانایی

۱) در ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۴}$ که $a_{ij}=\begin{cases} i-j^{۲} & ,i<j\\ i+j & ,i\geq j\end{cases}$ می‌باشد حاصل $a_{۱۳}+a_{۳۲}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۳ ۳) ۵ ۴) ۲

۲) از رابطهٔ ماتریسی $[x \quad ۲x \quad -۱]\times\begin{bmatrix}۳&-۱&۱\\۴&۰&-۲\\۱&۲&۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\۲x\\-۱\end{bmatrix}=۰$، عدد غیرصفر x، کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۴}{۹}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

۳) اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۰\\-۱&-۱\end{bmatrix}$ و $A\cdot(X+I)=\begin{bmatrix}۲&-۱\\۴&۳\end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ماتریس X کدام است؟

۱) -۹ ۲) ۷ ۳) ۵ ۴) -۳

۴) ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}x&۲\\-۲&۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳&۱\\y&-۳\end{bmatrix}$ تعویض‌پذیرند، حاصل $x-y$ کدام است؟

۱) ۱۳ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱

۵) اگر A و B ماتریس ۲×۲ باشند و داشته باشیم $|A|=۵$ و $B=\begin{bmatrix}۱&۱\\-۱&۲\end{bmatrix}$ آنگاه حاصل $|AB+۳A|$ کدام است؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۰۵ ۴) ۲۰

۶) اگر $A=\begin{bmatrix}۱&۲&-۱\\۲&۱&۰\\۱&-۳&۳\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس $\frac{۱}{۲}A^{۳}$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) ۴ ۴) -۴

۷) ماتریس وارون‌پذیر $A_{۲\times۲}$طوری مفروض است که $A^{-۱}=۴A^{۳}$، حاصل $|A|$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $-\frac{۱}{۲}$ ۳) $\pm\frac{۱}{۲}$ ۴) ۲

۸) به‌ازای کدام مقدار a ماتریس $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۳&a\end{bmatrix}$ وارون‌پذیر <u>نیست</u>؟

۱) $a=۶$ ۲) $a=\frac{۲}{۳}$ ۳) $a\neq۶$ ۴) $a\neq\frac{۲}{۳}$

۹) اگر A و B دو ماتریس مربعی، هم‌مرتبه و وارون‌پذیر باشند، کدام رابطه صحیح <u>نیست</u>؟

۱) $(A^{-۱})^{n}=(A^{n})^{-۱}$ ۲) $(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$ ۳) $(A+B)^{-۱}=A^{-۱}+B^{-۱}$ ۴) $(A^{-۱})^{-۱}=A$

۱۰) ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۴&۳\end{bmatrix}$ در رابطهٔ ماتریسی $AX=A-۲I$صدق می‌کند. ماتریس X کدام است؟

۱) $\begin{bmatrix}-۲&۲\\۳&-۱\end{bmatrix}$ ۲) $\begin{bmatrix}-۲&۱\\۴&-۱\end{bmatrix}$ ۳) $\begin{bmatrix}۲&-۱\\۴&۲\end{bmatrix}$ ۴) $\begin{bmatrix}۱&۲\\۴&-۱\end{bmatrix}$

۱۱) اثبات کدام قضیهٔ زیر، احتیاج به استدلال به روش برهان خلف <u>ندارد</u>؟

۱) عدد $\sqrt{۵}$ گنگ است.

۲) از یک نقطه، فقط یک خط موازی خط مفروض می‌توان رسم کرد.

۳) در یک صفحه از یک نقطه خارج خط مفروض، فقط یک خط می‌توان بر آن خط عمود کرد.

۴) مربع هر عدد طبیعی فرد، از مضرب ۸ یک واحد بیشتر است.

۱۲) اگر $۰\mid n^{۳}+۲n^{۲}-۳n$ باشد چند مقدار طبیعی برای n وجود دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

۱۳) با توجه به نمادهای «بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک و کوچک‌ترین مضرب مشترک» عدد $[۱۵۴ , (۴۲۹ , ۶۲۷)]$، کدام است؟

۱) ۴۶۲ ۲) ۴۷۸ ۳) ۵۰۶ ۴) ۹۲۴

۱۴) در تقسیم عدد a بر ۶۳ باقیمانده ۱۷ است. اگر ۶۰ واحد به a اضافه کنیم، باقیمانده و خارج‌قسمت چه تغییری می‌کنند؟

۱) سه واحد کم می‌شود- یک واحد اضافه می‌شود.
۲) سه واحد اضافه می‌شود- یک واحد اضافه می شود.
۳) سه واحد اضافه می‌شود- تغییر نمی‌کند.
۴) سه واحد کم می‌شود- دو واحد اضافه می‌شود.

۱۵) باقیماندهٔ تقسیم a بر ۱۳ برابر ۲ است، باقیماندهٔ تقسیم $۳a^۲ + ۷a$ بر ۱۳ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۷

۱۶) اگر باقیماندهٔ تقسیم عدد a بر ۶ و ۷ به ترتیب ۲ و ۵ باشد آنگاه باقیماندهٔ تقسیم a بر ۴۲ کدام است؟

۱) ۲۴ ۲) ۲۵ ۳) ۲۶ ۴) ۲۷

۱۷) اگر $\dfrac{(n+۱)!}{(n-۱)!} = ۳۰$ باشد، آنگاه حاصل $\dfrac{n^۲ + ۵}{n!}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) $\dfrac{۱}{۴}$ ۳) ۵ ۴) $\dfrac{۱}{۵}$

۱۸) حروف کلمهٔ $severe$ را به چند طریق بدون توجه به مفهوم آن می‌توان کنار هم قرار دارد، به طوری که eها یک‌درمیان باشند؟

۱) ۶ ۲) ۳۶ ۳) ۱۲ ۴) ۲۴

۱۹) با ارقام $(۰ , ۲ , ۴ , ۵ , ۷ , ۸)$ چند عدد ۴ رقمی فرد بزرگ‌تر از ۴۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۴۸ ۲) ۶۸ ۳) ۷۲ ۴) ۹۶

۲۰) اگر n عددی طبیعی باشد، از روابط $a \mid ۶n^۲ + ۱ \; , \; a \mid ۴n^۲ + ۶$، چند مقدار طبیعی برای a موجود است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۵

پاسخ‌نامهٔ تشریحی

۱ (۱) **(۲)** (۳) (۴) ماتریس A را می‌سازیم:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+1 & 1-2^2 & 1-3^2 & 1-4^2\\ 2+1 & 2+2 & 2-3^2 & 2-4^2\\ 3+1 & 3+2 & 3+3 & 3-4^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -3 & -8 & -15\\ 3 & 4 & -7 & -14\\ 4 & 5 & 6 & -13\end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} a_{13}=-8\\ a_{32}=5\end{matrix}\to a_{12}+a_{32}=-8+5=-3$$

۲ **(۱)** (۲) (۳) (۴) ضرب ماتریس‌ها را از سمت چپ انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix} x & 2x & -1\end{bmatrix}_{1\times 3}\times\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1\\ 4 & 0 & -2\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}_{3\times 3}\times\begin{bmatrix} x\\ 2x\\ -1\end{bmatrix}_{3\times 1}=0$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix} 11x-1 & -x-2 & -3x\end{bmatrix}_{1\times 3}\times\begin{bmatrix} x\\ 2x\\ -1\end{bmatrix}_{3\times 1}=0$$

$$\Rightarrow[11x^2-x-2x^2-4x+3x]=0\Rightarrow 9x^2-2x=0\Rightarrow x(9x-2)=0\Rightarrow\begin{cases} x=0\\ x=\frac{2}{9}\end{cases}$$

۳ **(۱)** (۲) (۳) (۴) اگر $X=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ فرض شود:

$$X+I=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+1 & b\\ c & d+1\end{bmatrix}$$

$$A\cdot(X+I)=\begin{bmatrix} 1 & 0\\ -1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} a+1 & b\\ c & d+1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a+1 & b\\ -a-1-c & -b-d-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & -1\\ 4 & 3\end{bmatrix}$$

$$a+1=2\to a=1$$

$$-b-d-1=3\xrightarrow{b=-1}1-d-1=3\to d=-3$$

$$-a-1-c=4\xrightarrow{a=1}-1-1-c=4\to c=-6\to X=\begin{bmatrix} a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1\\ -6 & -3\end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌های ماتریس X $=1-1-6-3=-9$

۴ (۱) (۲) **(۳)** (۴) ماتریس‌های A و B تعویض‌پذیرند، پس $AB=BA$؛ داریم:

$$\begin{cases} AB=\begin{bmatrix} x & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 1\\ y & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x+2y & x-6\\ -6+y & -5\end{bmatrix}\\ BA=\begin{bmatrix} 3 & 1\\ y & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix} x & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x-2 & 7\\ xy+6 & 2y-3\end{bmatrix}\end{cases}$$

$$AB=BA\to\begin{bmatrix} 3x+2y & x-6\\ -6+y & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3x-2 & 7\\ xy+6 & 2y-3\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x-6=7\to x=13\\ 2y-3=-5\to y=-1\end{cases}\to x-y=14$$

۵ (۱) (۲) **(۳)** (۴) ماتریس حاصل را به‌صورت ضرب دو ماتریس می‌نویسیم:

$$|AB+3A|=|A(B+3I)|=|A|\,|B+3I|$$

$$B+3I=\begin{bmatrix} 1 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 1\\ -1 & 5\end{bmatrix}\to|B+3I|=21$$

$$\Rightarrow|AB+3A|=|A|\,|B+3I|=5\times 21=105$$

۶ **(۱)** (۲) (۳) (۴)

نکته: اگر A ماتریس مربعی $n\times n$ باشد و $k\in\mathbb{R}$ آنگاه:

$$1)\ |kA|=k^n|A|$$
$$2)\ |A^n|=|A|^n$$

$$|A|\xrightarrow{\text{ساروس}}(3+0+6)-(-1+12+0)=9-11=-2$$

$$\left|\frac{1}{2}A^3\right| = \left(\frac{1}{2}\right)^3|A^3| = \frac{1}{8}|A|^3 = \frac{1}{8}\times(-2)^3 = -1$$

۷ ۴ **۳** ۲ ۱ از طرفین رابطه داده شده، دترمینان می‌گیریم:

$$A^{-1}=4A^3 \to |A^{-1}|=|4A^3|=4^2|A^3| \to \frac{1}{|A|}=16|A|^3 \to |A|^4=\frac{1}{16} \to |A|=\pm\frac{1}{2}$$

۸ ۴ ۳ ۲ **۱** شرط اینکه ماتریس A وارون‌پذیر نباشد آن است که $|A|=0$، پس:

$$|A|=0 \to |A|=\begin{vmatrix}1&2\\3&a\end{vmatrix}=0 \to a-6=0 \to a=6$$

۹ ۴ **۳** ۲ ۱ با فرض $A=B=I$ ، گزینه (۳) رد می‌شود.

در حالت کلی : $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$

۱۰ ۴ ۳ **۲** ۱

A^{-1} را از سمت چپ در رابطهٔ ماتریسی ضرب می‌کنیم:

$$AX=A-2I \xrightarrow{A^{-1}\times} \underbrace{A^{-1}A}_{I}X = A^{-1}(A-2I) \Rightarrow X=A^{-1}A-2A^{-1}I$$

$$\Rightarrow X=I-2A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-2\times\frac{1}{6-4}\begin{bmatrix}3&-1\\-4&2\end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}3&-1\\-4&2\end{bmatrix} \Rightarrow X=\begin{bmatrix}-2&1\\4&-1\end{bmatrix}$$

۱۱ **۴** ۳ ۲ ۱

درستی گزینهٔ «۴» را به کمک روش اثبات مستقیم می‌توان به سادگی نشان داد.

دقت کنید مورد گزینهٔ ۲، اصل اقلیدس است (قضیه نیست)

۱۲ ۴ ۳ **۲** ۱ با توجه به رابطهٔ سوال، تنها به‌ازای $n^3+2n^2-3n=0$ رابطه برقرار است، بنابراین داریم:

$$n(n^2+2n-3)=0 \Rightarrow n(n-1)(n+3)=0 \Rightarrow \begin{cases}n=0\\n=1\\n=-3\end{cases}$$

پس ۱ مقدار طبیعی برای n وجود دارد.

۱۳ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$627=3\times11\times19 \quad , \quad 429=3\times11\times13$$

$$(627,429)=(3\times11\times19\,,\,3\times11\times13) \xrightarrow{\text{پایه‌های مشترک با توان کمتر}} 3\times11=33$$

$$[(627,429),154]=[33,154]=[3\times11\,,\,2\times7\times11] \xrightarrow[\text{پایه‌های غیرمشترک}]{\text{پایه‌های مشترک با توان بیشتر}\ \times} 2\times3\times7\times11=462$$

۱۴ ۴ ۳ ۲ **۱**

$$a=63q+17$$

$$a+60=63q+17+60 \Rightarrow a+60=63q+77 \Rightarrow a+60=63(q+1)+14$$

خارج قسمت یک واحد اضافه شده و باقیمانده ۳ واحد کم شده است.

۱۵ ۴ ۳ ۲ **۱** طبق فرض داریم: $a=13k+2$

$$3a^2+7a=3(13k+2)^2+7(13k+2)=3\times13^2k^2+12\times13k+12+7\times13k+14=13\underbrace{(3\times13k^2+12k+7k)}_{q}+26=13q+26$$

$$=13\underbrace{(q+2)}_{q'}=13q'$$

بنابراین $3a^2+7aq'$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است.

۱۶ ۴ **۳** ۲ ۱ طبق فرض داریم:

$$\left.\begin{array}{l} a=6q+2 \xrightarrow{\times7} 7a=42q+14 \\ a=7q'+5 \xrightarrow{\times6} 6a=42q'+30 \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل}} a=42(q-q')-16 \Rightarrow a=42(q-q')-16+42-42 \Rightarrow a=42(q-q'-1)+26$$

بنابراین باقیماندهٔ تقسیم a بر ۴۲ برابر ۲۶ است.

۱۷ ۴ ۳ **۲** ۱

$$\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=\frac{(n+1)n(n-1)!}{(n-1)!}=n(n+1)=30 \Rightarrow n=5$$

$$\frac{n^2+5}{n!}=\frac{25+5}{5!}=\frac{30}{5\times4\times3\times2\times1}=\frac{1}{4}$$

۱۸ ۴ ۳ ۲ ۱ eها می‌توانند در خانه‌های اول، سوم و پنجم یا در خانه‌های دوم، چهارم و ششم قرار گیرند و حروف دیگر (s, v, r) در خانه‌های باقی‌مانده قرار می‌گیرند. (جابه‌جایی حروف e با خودشان جایگشت جدیدی به‌وجود نمی‌آورند.)

$$\left.\begin{array}{l} \underset{}{\underline{۳}}\ \underset{e}{\underline{\ \ }}\ \underset{}{\underline{۲}}\ \underset{e}{\underline{\ \ }}\ \underset{}{\underline{۱}}\ \underset{e}{\underline{\ \ }} = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶ \\ \underset{e}{\underline{\ \ }}\ \underset{}{\underline{۳}}\ \underset{e}{\underline{\ \ }}\ \underset{}{\underline{۲}}\ \underset{e}{\underline{\ \ }}\ \underset{}{\underline{۱}} = ۳ \times ۲ \times ۱ = ۶ \end{array}\right\} \Rightarrow ۶ + ۶ = ۱۲$$

۱۹ ۴ ۳ ۲ ۱ چون عدد باید فرد باشد، در خانهٔ یکان یا ۵ یا ۷ قرار می‌گیرد، پس دو حالت داریم. در خانهٔ اول سمت چپ چون عدد باید از ۴۰۰۰ بزرگ‌تر باشد، باید ۴ یا بیشتر از ۴ باشد که یکی از ارقام ۵ و ۷ را قبلاً انتخاب کردیم، پس ۳ حالت داریم یا ۸ یا ۴ یا یکی از ۵ و ۷ (۲ و صفر نمی‌تواند در خانهٔ اول باشد.)

برای خانهٔ دوم از سمت چپ، چون از ۶ تا رقم دو رقم استفاده شده، پس ۴ حالت داریم و برای خانهٔ سوم از سمت چپ به همین ترتیب ۳ رقم باقی می‌ماند.

$$\boxed{۳}\boxed{۴}\boxed{۳}\boxed{۲} = ۳ \times ۴ \times ۳ \times ۲ = ۷۲$$

۲۰ ۴ ۳ ۲ ۱

طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a \mid ۴n^۲ + ۶ \\ a \mid ۶n^۲ + ۱ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \mid ۱۲n^۲ + ۱۸ \\ a \mid ۱۲n^۲ + ۲ \end{cases} \Rightarrow a \mid ۱۶$$

بنابراین $a \in \{۱ , ۲ , ۴ , ۸ , ۱۶\}$ ولی با توجه به اینکه $۶n^۲ + ۱$ عددی فرد و $۴n^۲ + ۶$ عددی زوج است، تنها مقدار قابل‌قبول برابراست با $a = ۱$.

پاسخ‌نامه‌ی کلیدی

۱	۲
۲	۱
۳	۱
۴	۳
۵	۳
۶	۱
۷	۳
۸	۱
۹	۳
۱۰	۲
۱۱	۴
۱۲	۲
۱۳	۱
۱۴	۱
۱۵	۱
۱۶	۳
۱۷	۲
۱۸	۳
۱۹	۳
۲۰	۱

گام آفتاب