



گام آفتاب

آزمون ۶ مهر ۱۴۰۲ حسابان و ریاضی

سال دوازدهم ریاضی

بسم الله خالق دانا سايي



۱ اگر $f(x) = x^2 - \sqrt{3x}$ و $g = \{(-2, 0), (0, 3), (1, -1), (3, -2)\}$ باشند، آنگاه حاصل $(f \circ g^{-1})(-2)$ کدام است؟

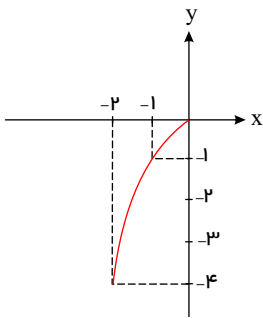
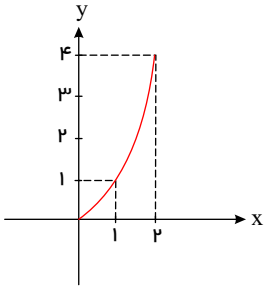
۴ تعریف نشده

۳ ۶

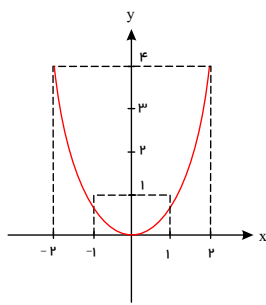
۲ ۳

۱ صفر

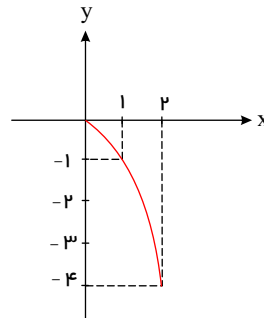
۲ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. نمودار $y = -f(-x)$ کدام است؟



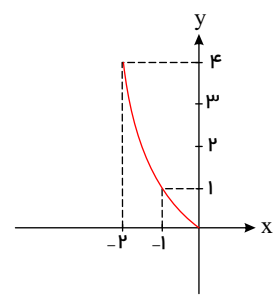
۴



۳

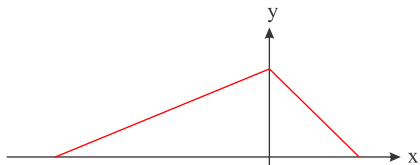
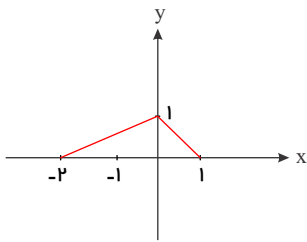


۲

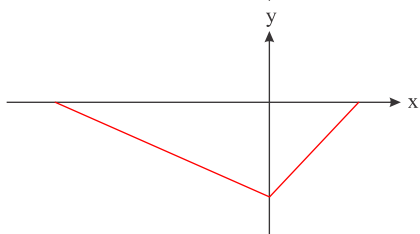


۱

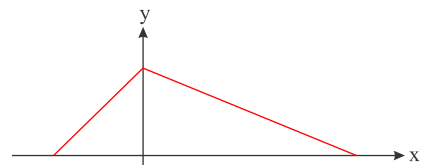
۳ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -2f(-\frac{x}{2})$ کدام است؟



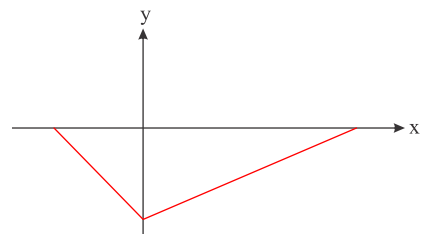
۲



۴



۱



۳

۴ تابع $f(x) = \frac{ax+2}{x+3}$ نسبت به نیمساز ربع اول و سوم متقارن است. حاصل $f^{-1}(-2)$ کدام است؟

۴ -۸

۳ ۴

۲ ۸

۱ ۶

۵ نمودار تابعی را ۲ واحد به سمت راست انتقال داده ایم و سپس قرینه شکل حاصل را نسبت به محور x ها ۳ برابر در جهت عمودی منبسط کرده ایم

و تابع $y = -|3x - 12|$ به دست آمده است. تابع اولیه کدام بوده است؟

۴ $y = |x - 2|$

۳ $y = |x - 6|$

۲ $y = \frac{1}{3}|2 - x|$

۱ $y = 9|x - 6|$

۶ نمودار $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ها قرینه کرده، سپس آن را در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط کرده‌ایم و بعد ۳ واحد به چپ و در نهایت ۵ واحد به بالا منتقل نموده‌ایم. ضابطه نمودار حاصل کدام است؟

$y = \sqrt{-\frac{1}{2}x - 3} + 5$ (۱)
 $y = \sqrt{-\frac{1}{2}x - 3} + 5$ (۲)
 $y = \sqrt{-2x - 3} + 5$ (۳)
 $y = \sqrt{-2x + 3} + 5$ (۴)

۷ اگر $f = \{(1, 2), (-3, -1), (3, 4), (4, -3)\}$ باشد، مقدار $f^{-1}(-3) + f(3)$ کدام است؟

۲ (۱) ۱۳ (۲) ۴ (۳) ۱۲ (۴)

۸ اگر نقطه $A(-4, 3)$ روی نمودار تابع $y = f(x)$ باشد، نقطه متناظر آن روی نمودار تابع $g(x) = f(x - 3) + 4$ کدام است؟

$A'(-7, 7)$ (۱) $A'(-1, -1)$ (۲) $A'(-4, 7)$ (۳) $A'(-1, 7)$ (۴)

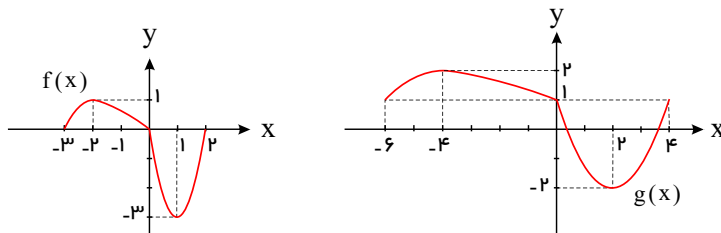
۹ اگر $f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}$ و $g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$ دو تابع باشند، برد تابع $(g^{-1} \circ f) - f$ کدام است؟

$\{-1, 4\}$ (۱) $\{2, 3\}$ (۲) $\{3, 4\}$ (۳) $\{2, -1\}$ (۴)

۱۰ اگر $f(x) = 3x - 2$ و $(g \circ f)(x) = 9x^2 - 9x + 2$ باشد، ضابطه تابع $(g - f)(x)$ کدام است؟

$-x^2 - 2x + 2$ (۱) $x^2 + 2x - 1$ (۲) $-x^2 + 2x - 1$ (۳) $x^2 - 2x + 2$ (۴)

۱۱ با توجه به نمودار دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ کدام رابطه صحیح است؟



$g(x) = f\left(\frac{x+2}{2}\right)$ (۱)

$g(x) = f(2x) + 1$ (۲)

$g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$ (۳)

$g(x) = f(x+2) + 2$ (۴)

۱۲ نمودار وارون تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x+3}$ از کدام ناحیه محورهای مختصات عبور نمی‌کند؟

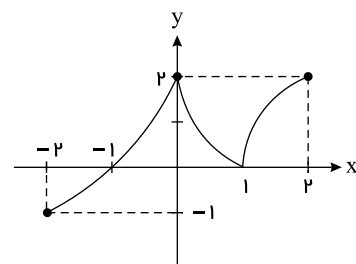
اول (۱) دوم (۲) سوم (۳) چهارم (۴)

۱۳ اگر چندجمله‌ای $p(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1$ بر چندجمله‌ای‌های $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر باشد، باقی مانده تقسیم $p(x)$ بر چندجمله‌ای $x - 1$ کدام است؟

صفر (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴)

۱۴ اگر ضابطه وارون تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 1$ به صورت $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x-a} - b$ باشد، حاصل $a \times b$ کدام است؟

۲ (۱) ۱۴ (۲) -۲ (۳) -۱۴ (۴)



۱۵ نمودار تابع f در شکل مقابل رسم شده است. حاصل $(f \circ f)(2) + (f \circ f)(-1)$ کدام است؟

۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

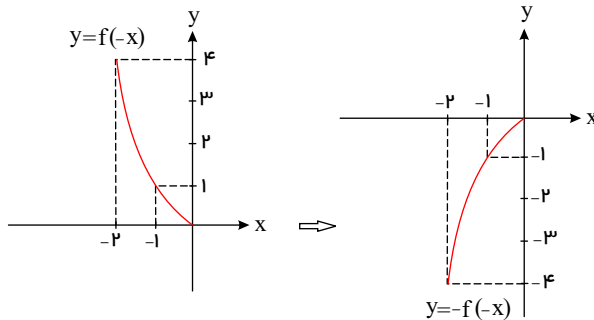
پاسخنامه تشریحی

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

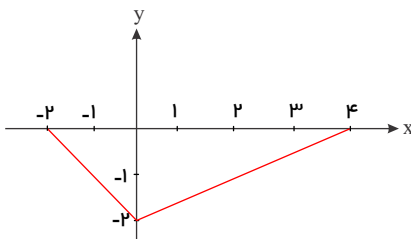
$$g = \{(-2, 0), (0, 3), (1, -1), (3, -2)\} \rightarrow g^{-1} = \{(0, -2), (3, 0), (-1, 1), (-2, 3)\}$$

$$\text{پس } (fog^{-1})(-2) = f(g^{-1}(-2)) = f(3) = 9 - \sqrt{9} = 9 - 3 = 6$$

۲ برای رسم $y = -f(-x)$ نمودار $y = f(x)$ را نسبت به محور y ها و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم، یا به عبارتی نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم:



۳ برای رسم $y = -2f(-\frac{x}{2})$ در نمودار $y = f(x)$ طول نقاط را -2 برابر کرده و سپس عرض نقاط را -2 برابر می‌کنیم.



۴ نکته: اگر خط $y = x$ محور تقارن یک تابع باشد، آنگاه آن تابع با وارون خودش برابر است.

نکته: شرط این که تابع $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ با تابع وارون خودش یکی باشد آن است که $a + d = 0$ ، پس در این سؤال داریم:

$$a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3$$

$$\Rightarrow f(x) = f^{-1}(x) = \frac{-3x+2}{x+3} \Rightarrow f^{-1}(-2) = \frac{6+2}{-2+3} = 8$$

۵ باید مراحل گفته شده را به صورت برعکس از انتها به ابتدا انجام دهیم، که داریم:

$$y = -|3x - 12| = -3|x - 4| \xrightarrow{\text{تقلیض در راستای عمودی یا ضرب در } \frac{1}{3}} y = \frac{1}{3} \times (-3)|x - 4| = -|x - 4|$$

$$\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x} y = |x - 4| \xrightarrow{\text{واحد انتقال به چپ } x \rightarrow x+2} y = |x+2-4| = |x-2|$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{x \rightarrow -x} y_1 = \sqrt{-x} \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{x}} y_2 = \sqrt{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow x+3} y_3 = \sqrt{-\frac{1}{x+3}}$$

$$\xrightarrow{\text{واحد به بالا}} y = \sqrt{-\frac{1}{x+3}} + 5 = \sqrt{-\frac{1}{x+3} - \frac{3}{x+3}} + 5$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷

$$f = \{(1, 2), (-3, -1), (3, 4), (4, -3)\} \rightarrow f(3) = 4$$

$$f^{-1} = \{(2, 1), (-1, -3), (4, 3), (-3, 4)\} \rightarrow f^{-1}(-3) = 4$$

$$\text{پس: } 2f^{-1}(-3) + f(3) = 8 + 4 = 12$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۸

نمودار تابع $f(x)$ سه واحد به سمت راست و ۴ واحد به بالا برده شده است.

$$A \begin{matrix} \xrightarrow{\text{سه واحد راست}} \\ \xrightarrow{\text{چهار واحد بالا}} \end{matrix} \begin{matrix} -4 \\ -1 \end{matrix} \begin{matrix} \xrightarrow{\text{سه واحد راست}} \\ \xrightarrow{\text{چهار واحد بالا}} \end{matrix} \begin{matrix} -1 \\ 7 \end{matrix}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$f = \{(1, 2), (2, 5), (3, 4), (4, 6)\}, \quad g = \{(2, 3), (4, 2), (5, 6), (3, 1)\}$$

$$g^{-1} = \{(3, 2), (2, 4), (6, 5), (1, 3)\} \Rightarrow g^{-1} \circ f = \{(1, 4), (4, 5)\}$$

$$g^{-1} \circ f - f = \{(1, 4 - 2), (4, 5 - 6)\} = \{(1, 2), (4, -1)\} \Rightarrow \text{برد} = \{2, -1\}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

$$f(x) = 3x - 2, \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = 9x^2 - 9x + 2 \Rightarrow g(3x - 2) = 9x^2 - 9x + 2$$

$$3x - 2 = t \Rightarrow x = \frac{t+2}{3}$$

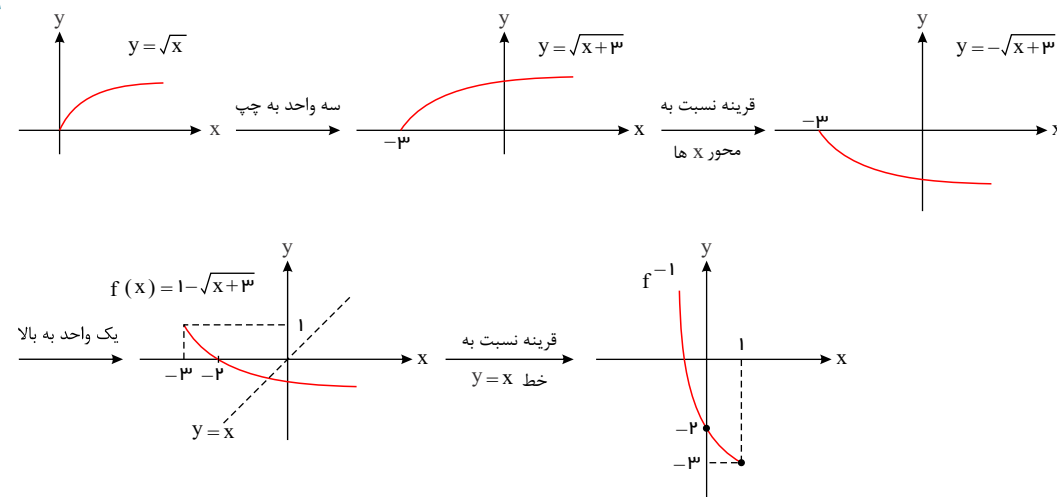
$$g(t) = 9\left(\frac{t+2}{3}\right)^2 - 9\left(\frac{t+2}{3}\right) + 2 \Rightarrow g(t) = t^2 + 4 + 4t - 3t - 6 + 2 \Rightarrow g(t) = t^2 + t \Rightarrow g(x) = x^2 + x$$

$$\text{پس: } (g - f)(x) = g(x) - f(x) = x^2 + x - (3x - 2) = x^2 - 2x + 2$$

نمودار $f(x)$ در راستای افقی با ضریب ۲ منبسط شده و سپس یک واحد به بالا رفته است، پس داریم:

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \frac{1}{2}x} f\left(\frac{1}{2}x\right) \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}} f\left(\frac{1}{2}x\right) + 1 \Rightarrow g(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + 1$$

نمودار تابع $f(x) = 1 - \sqrt{x+3}$ را با استفاده از انتقال نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ رسم می‌کنیم و سپس نمودار را نسبت به خط $y = x$ قرینه می‌کنیم تا نمودار تابع f^{-1} به دست آید.



پس f^{-1} از ناحیه اول عبور نمی‌کند.

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

چون $p(x) = x^3 - ax^2 + bx + 1$ بر $x - 2$ و $x + 1$ بخش پذیر است، داریم:

$$\left. \begin{aligned} p(2) = 0 &\Rightarrow 8 - 4a + 2b + 1 = 0 \Rightarrow 4a - 2b = 9 \\ p(-1) = 0 &\Rightarrow -1 - a - b + 1 = 0 \Rightarrow a + b = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow a = \frac{3}{2}, b = -\frac{3}{2}$$

پس $p(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}x + 1$ است.

$$2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{8} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{8} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4} + 1 = 0$$

تابع f را می‌توان به صورت زیر به شکل اتحاد مکعب دو جمله‌ای نوشت:

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 7 = (x - 2)^3 + 7 \Rightarrow y = (x - 2)^3 + 7$$

$$\Rightarrow (x - 2)^3 = y - 7 \Rightarrow x - 2 = \sqrt[3]{y - 7} \Rightarrow x = \sqrt[3]{y - 7} + 2$$

$$\Rightarrow y = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x - 7} + 2 = \sqrt[3]{x - a} - b \Rightarrow a = 7, b = -2$$

$$\Rightarrow a \times b = 7 \times (-2) = -14$$

توجه کنید که $f(0) = 7$ و $f(2) = 7$, $f(-1) = 0$ پس: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵

$$(f \circ f)(2) + (f \circ f)(-1) = f(f(2)) + f(f(-1)) = f(7) + f(0) = 7 + 7 = 14$$

پاسخ نامه کلیدی



۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴



گام آفتاب