



گام آفتاب

آزمون ۲۱ شهریور ۱۴۰۲ حسابان و ریاضی

سال دوازدهم ریاضی

بسم الله خالق دانا سايی



۱) قرینه نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را نسبت به محور y ‌ها تعیین کرده، سپس ۲ واحد به طرف x ‌های مثبت انتقال می‌دهیم. نمودار حاصل، نیمساز ناحیه اول و سوم را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ۱) -۲ ۲) ۰٫۵ ۳) ۱ ۴) ۱٫۵

۲) تابع با ضابطه $f(x) = |x+2| + |x-1|$ ، روی کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

- ۱) $(-\infty, -2)$ ۲) $(-\infty, 1)$ ۳) $(-2, 1)$ ۴) $(1, +\infty)$

۳) نقطه $A(-1, 3)$ روی نمودار تابع $f(x)$ و نقطه متناظر با آن یعنی $A'(a, b)$ روی نمودار تابع $y = 3f(2x-5) - 7$ قرار دارد. $a - b$ کدام است؟

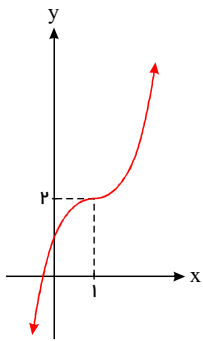
- ۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۴

۴) ضابطه وارون تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x-1}$ ، به کدام صورت است؟

- ۱) $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5 : x \leq 2$ ۲) $f^{-1}(x) = -x^2 + 4x - 5 : x \leq 2$
۳) $f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5 : x \geq 1$ ۴) $f^{-1}(x) = -x^2 + 4x - 5 : x \geq 1$

۵) نمودار تابع با ضابطه $y = (x-a)^3 + b$ به صورت زیر است. حاصل $a \cdot b$ کدام است؟

- ۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۳ ۴) -۳



۶) ابتدا قرینه نمودار تابع $f(x) = (x-1)^2$ را نسبت به مبدأ مختصات رسم کرده، سپس منحنی حاصل را ۴ واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم. طول نقاط تلاقی منحنی اخیر با منحنی اصلی کدام است؟

- ۱) ۰٫۲ ۲) -۱٫۱ ۳) -۱٫۲ ۴) ۱٫-۲

۷) نقطه $A(3, -6)$ متعلق به تابع $y = f(x)$ است، نقطه متناظر آن در تابع $g(x) = -2f(2x-4) + 3$ کدام است؟

- ۱) $A'(2, 15)$ ۲) $A'(\frac{7}{2}, 15)$ ۳) $A'(\frac{7}{2}, -9)$ ۴) $A'(2, -9)$

۸) روی نمودار تابع $f(x) = x^2$ به ترتیب چهار عمل انجام می‌دهیم؛ انتقال ۴ واحد به طرف x ‌های منفی. قرینه نسبت به محور x ‌ها، دو برابر کردن عرض نقاط و انتقال ۳ واحد به طرف y ‌های منفی، ضابطه نمودار حاصل کدام است؟

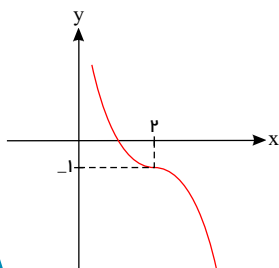
- ۱) $y = 2x^2 - 8x - 11$ ۲) $y = 2x^2 - 16x - 29$ ۳) $y = -2x^2 - 16x - 35$ ۴) $y = -2x^2 + 16x - 35$

۹) تابع f در بازه اعداد حقیقی اکیداً نزولی است. اگر $f(3x+7) \leq f(x-3)$ ، آنگاه بزرگترین محدوده x کدام است؟

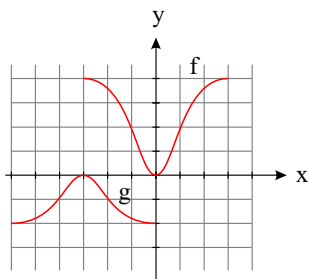
- ۱) $x < -5$ ۲) $x > -5$ ۳) $x \leq -5$ ۴) $x \geq -5$

۱۰) اگر نمودار تابع $y = -x^3 + ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل باشد، حاصل $a - b + 2c$ کدام است؟

- ۱) -۳۶ ۲) ۳۲ ۳) ۳۶ ۴) -۳۲



۱۱ در شکل مقابل، نمودار g از طریق تعدادی عملیات انبساط، انقباض، انتقال و قرینه روی تابع f به دست آمده است. ضابطه تابع g کدام است؟



① $\frac{f(-x-3)}{2}$

② $\frac{f(2-x)}{2}$

③ $\frac{-f(x+3)}{2}$

④ $\frac{-f(3-x)}{2}$

۱۲ اگر $(f \circ g)(x) = 3g(x) + 5$ و $(g \circ f)(x) = 9x^2 + 30x + 26$ باشند، ضابطه تابع $g(x)$ کدام است؟

① x^2

② $(x+1)^2$

③ $x^2 + 1$

④ $x^2 + 4$

۱۳ اگر برد تابع f برابر $R_f = [-\sqrt{3}, 2]$ باشد، برد تابع $g(x) = \sqrt{2}f(x-1) + 1$ شامل چند عدد صحیح است؟

① ۵

② ۲

③ ۳

④ ۴

۱۴ اگر $f(g(x)) = 3x^2 - 6x - 5$ و $f(x) = 3x + 4$ باشد، $g(2)$ کدام است؟

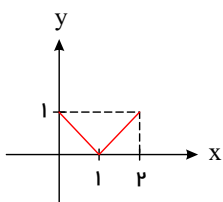
① صفر

② ۲

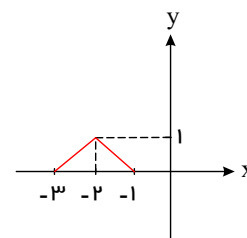
③ -۵

④ -۳

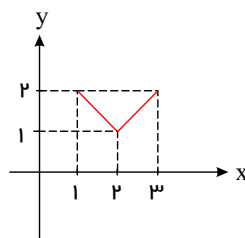
۱۵ نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. نمودار تابع $y = -f(x-1) + 1$ کدام است؟



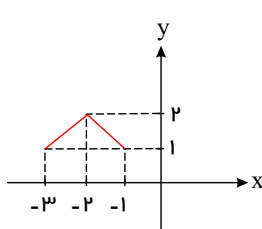
①



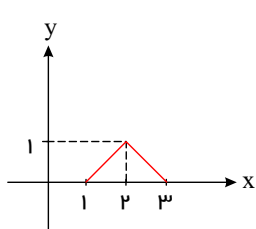
②



③



④



پاسخنامه تشریحی

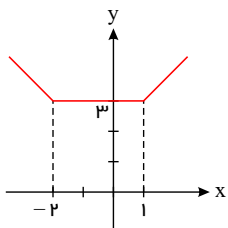
۱ ۲ ۳ ۴ ۱

$$f(x) = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } y\text{ ها}} g(x) = \sqrt{-x} \xrightarrow[\text{مثبت}]{\text{دو واحد به طرف } x\text{ های}} h(x) = \sqrt{-(x-2)} = \sqrt{-x+2}$$

$$\begin{cases} h(x) = \sqrt{-x+2} \\ y = x \end{cases} \xrightarrow{\text{تلاقی}} \sqrt{-x+2} = x \xrightarrow{\text{توان ۲}} -x+2 = x^2 \Rightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1) = 0$$

غقوق (در معادله صدق نمی‌کند) $x = -2$
 قق $x = 1$

تابع داده شده یک تابع گلدانی است که در $x = -2$ و $x = 1$ (ریشه‌های داخل قدرمطلق) دارای شکست است. ۱ ۲ ۳ ۴ ۲



اکیداً نزولی: $x < -2$

۱ ۲ ۳ ۴ ۳

روش اول:

$$\begin{aligned} A(-1, 3) \in f &\Rightarrow f(-1) = 3, \quad 2x - 5 = -1 \Rightarrow x = 2 \\ y(2) &= 3f(-1) - 7 = 3 \times 3 - 7 = 2 \Rightarrow A'(2, 2) \Rightarrow a = 2, \quad b = 2 \Rightarrow a - b = 0 \\ \text{پس: } y(2) &= 3f(-1) - 7 = 3(3) - 7 = 2 \Rightarrow A' \Big|_2^{a=2, b=2} \rightarrow a - b = 0 \end{aligned}$$

روش دوم: تابع f پنج واحد به سمت راست برده شده و سپس طول‌هایش نصف شده و عرض‌هایش ۳ برابر شده و نهایتاً ۷ واحد به پایین برده شده است.

$$\left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{پنج واحد راست}} \left| \begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{طول‌ها نصف}} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 6 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{عرض سه برابر}} \left| \begin{array}{c} 6 \\ 18 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{هفت واحد پایین}} \left| \begin{array}{c} 2 \\ 2 \end{array} \right| \rightarrow A'$$

پس $a - b = 0$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۴

ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم.

$$\begin{aligned} y &= 2 - \sqrt{x-1} \Rightarrow (\sqrt{x-1})^2 = (2-y)^2 \Rightarrow x-1 = 4 - 4y + y^2 \\ \Rightarrow x &= y^2 - 4y + 5 \Rightarrow f^{-1}(x) = x^2 - 4x + 5, \quad x \leq 2 \end{aligned}$$

چون $\sqrt{x-1}$ مثبت است، پس $-\sqrt{x-1}$ منفی بوده و $y = 2 - \sqrt{x-1}$ همواره کوچک‌تر مساوی ۲ می‌شود، بنابراین دامنه‌ی تابع معکوس $x \leq 2$ است.

۱ ۲ ۳ ۴ ۵

نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y = x^3$ به دست آمده است. اگر نمودار $y = x^3$ را یک واحد به سمت راست (در راستای محور x) و سپس دو واحد به سمت بالا (در راستای محور y) انتقال دهیم ضابطه $y = (x-1)^3 + 2$ به دست می‌آید که همان ضابطه مربوط به نمودار داده شده در صورت سؤال است. پس:

$$a = 1, \quad b = 2 \Rightarrow a \cdot b = 2$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۶

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} g(x) = -(-x-1)^2 \xrightarrow[\text{۴ واحد به سمت بالا}]{\text{۴ واحد به سمت بالا}} h(x) = -(-x-1)^2 + 4 \\ \text{تلاقی: } (x-1)^2 &= -(-x-1)^2 + 4 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x = -x^2 - 1 - 2x + 4 \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1, \quad x = -1 \end{aligned}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۷

تابع $f(x)$ چهار واحد به سمت راست برده شده، سپس طول نقاطش نصف شده است و سپس عرض‌ها ۲- برابر شده است و در نهایت شکل سه واحد به بالا برده شده است.

$$\left| \begin{array}{c} 3 \\ -6 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{چهار واحد راست}} \left| \begin{array}{c} 7 \\ -6 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{طول نصف}} \left| \begin{array}{c} 7/2 \\ -6 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{عرض ۲- برابر}} \left| \begin{array}{c} 7/2 \\ 12 \end{array} \right| \xrightarrow{\text{سه واحد بالا}} \left| \begin{array}{c} 7/2 \\ 15 \end{array} \right|$$

به ترتیب اعمال موردنظر داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۸

۴ واحد انتقال به طرف x های منفی $f(x) = x^2 \rightarrow f_1(x) = (x+4)^2$

قرینه نسبت به محور x ها $f_2(x) = -(x+4)^2$ دو برابر کردن عرض نقاط $f_3(x) = -2(x+4)^2$

۳ واحد انتقال به طرف y های منفی $f_4(x) = -2(x+4)^2 - 3 = -2(x^2 + 8x + 16) - 3 = -2x^2 - 16x - 35$

اگر تابع f اکیداً نزولی و $f(a) \leq f(b)$ ، آنگاه $a \geq b$ است. پس داریم: ۱ ۲ ۳ ۴ ۹

$$f(x-3) \leq f(3x+7) \Rightarrow x-3 \geq 3x+7 \Rightarrow -7-3 \geq 3x-x \Rightarrow 2x \leq -10 \Rightarrow x \leq -5$$

با توجه به اینکه ضریب پشت x^3 برابر ۱- می باشد، پس نمودار داده شده از انتقال نمودار $y = -x^3$ به صورت زیر حاصل شده است: ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۰

۲ واحد به راست $y = -x^3 \xrightarrow{x \rightarrow x-2} y = -(x-2)^3$ یک واحد به پایین $y = -(x-2)^3 - 1$

$$y = -(x^3 - 6x^2 + 12x - 8) - 1 = -x^3 + 6x^2 - 12x + 7 = -x^3 + ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow a = 6, b = -12, c = 7 \Rightarrow a - b + 2c = 6 - (-12) + 2 \times 7 = 6 + 12 + 14 = 32$$

ابتدا در مرحله اول، نمودار f را در راستای محور y ها، با ضریب $\frac{1}{2}$ منقبض کرده و در مرحله دوم، آن را نسبت به محور x ها قرینه می کنیم. در مرحله سوم، ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۱

نمودار را سه واحد به چپ منتقل می کنیم:

$$y = f(x) \xrightarrow{(1)} y = \frac{f(x)}{2} \xrightarrow{(2)} y = \frac{-f(x)}{2} \xrightarrow{(3)} y = \frac{-f(x+3)}{2}$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۲

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 3g(x) + 5, g(x) = t \Rightarrow f(t) = 3t + 5 \Rightarrow f(x) = 3x + 5$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = 9x^2 + 30x + 26 \Rightarrow g(3x+5) = 9x^2 + 30x + 26 + 1$$

$$\Rightarrow g(3x+5) = (3x+5)^2 + 1 \Rightarrow g(x) = x^2 + 1$$

۱ ۲ ۳ ۴ ۱۳

$$-\sqrt{3} \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq f(x-1) \leq 2 \Rightarrow -\sqrt{6} \leq \sqrt{2}f(x-1) \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow 1 - \sqrt{6} \leq \sqrt{2}f(x-1) + 1 \leq 2\sqrt{2} + 1$$

$$\Rightarrow \text{برد تابع} = [-\sqrt{6} + 1, 2\sqrt{2} + 1] \simeq [-1.5, 3.8] \Rightarrow \text{اعداد صحیح} = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$$

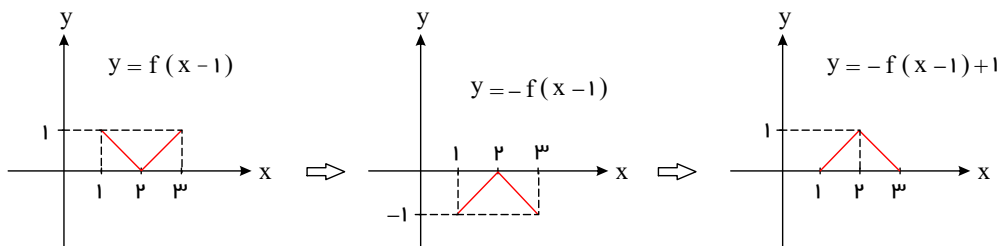
۱ ۲ ۳ ۴ ۱۴

$$f(x) = 3x + 4 \rightarrow f(g(x)) = 3g(x) + 4$$

$$\text{پس: } 3g(x) + 4 = 3x^2 - 6x - 5 \rightarrow 3g(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

$$\rightarrow g(x) = x^2 - 2x - 3 \rightarrow g(2) = 4 - 4 - 3 = -3$$

ابتدا $y = f(x)$ را یک واحد به راست منتقل کرده، سپس نسبت به محور x ها قرینه نموده و در نهایت یک واحد به بالا منتقل می کنیم. ۱ ۲ ۳ ۴ ۱۵



پاسخ نامه کلیدی



۱	۱	۲	۳	۴
۲	۱	۲	۳	۴
۳	۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳	۴

۵	۱	۲	۳	۴
۶	۱	۲	۳	۴
۷	۱	۲	۳	۴
۸	۱	۲	۳	۴

۹	۱	۲	۳	۴
۱۰	۱	۲	۳	۴
۱۱	۱	۲	۳	۴
۱۲	۱	۲	۳	۴

۱۳	۱	۲	۳	۴
۱۴	۱	۲	۳	۴
۱۵	۱	۲	۳	۴



گام آفتاب